Energia odkształcenia całej konstrukcji prętowej jest równa sumie energii odkształcenia elementów skończonych, na które konstrukcja została podzielona. Zatem po uwzględnieniu zależności (2.71, 2.74 i 2.75) możemy napisać

$$
\begin{aligned}
U_p &= \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}^T EJ\int_0^l \left[S_1'', S_2'', S_3'', S_4''\right]^T \left[S_1'', S_2'', S_3'', S_4''\right] \mathrm{d}\xi \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}^T \left[K_e\right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.77}
$$

Macierz

$$
\left[K_e\right] = EJ\int_0^l \left[S_1'', S_2'', S_3'', S_4''\right]^T \left[S_1'', S_2'', S_3'', S_4''\right] \mathrm{d}\xi \tag{2.78}
$$

nosi nazwę macierzy sztywności skończonego elementu belkowego. Macierz ta w postaci jawnej jest równa

$$
\left[K_e\right] = EJ\int_0^l \mathrm{d}\xi \begin{bmatrix} S_1''S_1'', & S_1''S_2'', & S_1''S_3'', & S_1''S_4'' \\ & S_2''S_2'', & S_2''S_3'', & S_2''S_4'' \\ & & S_3''S_3'', & S_3''S_4'' \\ & & & S_4''S_4'' \end{bmatrix}. \tag{2.79}
$$

Zatem obliczenie macierzy sztywności polega na wyznaczeniu całek z poszczególnych wyrazów tej macierzy. W tym przypadku warto zastosować wzór podany w pracy [65]

$$
I = \int_0^l L_1^p L_2^q \mathrm{d}l = \frac{p!q!}{(1+p+q)!} l. \tag{2.80}
$$

I tak przykładowo wyraz macierzy sztywności K_{11} wyznaczymy przy zastosowaniu tego wzoru

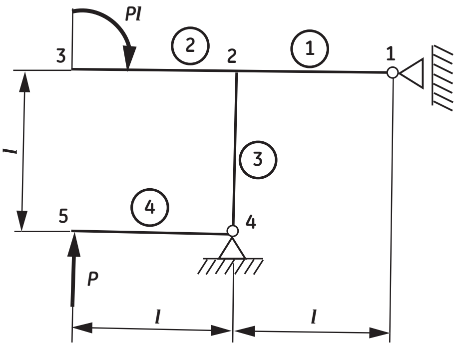
$$K_{11} = EJ\int_0^l S_1''S_2''\mathrm{d}\xi = \frac{36EJ}{l^4}\int_0^l \left(1-4L_1+4L_1^2\right)\mathrm{d}l =$$

$$= 36\frac{EJ}{l^4}\left[l - 4\frac{1!0!}{2!}l + 4\frac{2!0!}{3!}l\right] = 36\frac{EJ}{l^3}\frac{6-12+8}{6} = 12\frac{EJ}{l^3}.$$

Postępując analogicznie, otrzymamy macierz sztywności rozważanego elementu belkowego

$$\left[K_e\right] = \frac{2EJ}{l^3}\begin{bmatrix} 6, & 3l, & -6, & 3l \\ 3l, & 2l^2 & -3l, & l^2 \\ -6, & -3l, & 6, & -3l \\ 3l, & l^2, & -3l, & 2l^2 \end{bmatrix}. \tag{2.81}$$

PRZYKŁAD 2.13. Obliczyć pionowe przemieszczenia punktów 1, 3 i 5 oraz obroty węzłów 4 i 2 statycznie wyznaczanej ramy płaskiej przedstawionej na rysunku 2.34 dla danych z przykładu 1.6. Do obliczeń przyjąć: P = 1000 N, l = 500 mm, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa i $J = 0{,}414 \cdot 10^8$ mm^4.



Rys. 2.34. Do przykładu 2.13

Rozwiązanie. W wyniku dyskretyzacji geometrycznej rama została podzielona na 4 elementy połączone w węzłach, co zapisujemy w postaci macierzy topologii

$$[H] = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 2, & 4 \\ 2, & 3, & 4, & 5 \end{bmatrix}.$$